§13 Polyeder im Modellraum

Obwohl Polyeder (griech., „Vielflach“) in der klassischen Geometrie eine bedeutende Rolle spielen, wird in diesem Paragraphen nur ein Schlaglicht auf diese Objekte geworfen, um grundlegende Begriffsbildungen vorzunehmen.

Wegen der Komplexität der Materie wird der Lehrtext dieses Paragraphen offene Fragen hinterlassen. Diese werden zwar formuliert, jedoch in bewusster Beschränkung der Darstellung nicht beantwortet!

In unserer Anschauung ist ein Polyeder ein räumlicher Körper, der allseitig von Polygonflächen begrenzt wird. Beispielsweise weist die Oberfläche des rechts abgebildeten Modells[1] des Fußballs 12 Pentagone und 20 Hexagone auf.

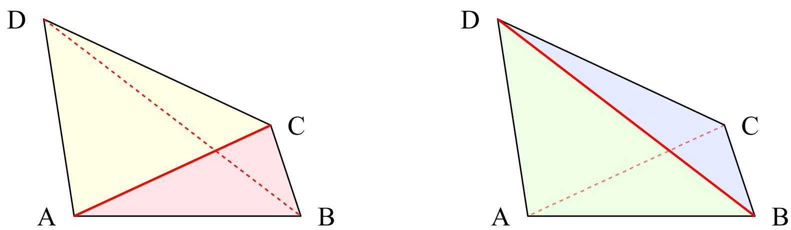
Das Hauptziel dieses Paragraphen besteht darin, geleitet von unserer Anschauung, eine belastbare allgemeine Definition des Begriffs „Polyeder“ für unseren Modellraum zu formulieren.

Es geht nicht darum, eine umfassende Theorie der Polyeder zu entwickeln. Es soll lediglich für eine theoretische Basis entstehen, die uns im weiteren Verlauf unserer Analytischen Geometrie die Behandlung von Prismen und Pyramiden ermöglicht.

Der Weg zur Formulierung einer Definition ist „steinig“. Das liegt insbesondere daran, dass wir noch nicht geklärt haben, was wir unter der *Fläche eines Polygons* verstehen wollen. Dass ein klares Verständnis von Polygonflächen aber vonnöten ist, sagt ja schon der oben niedergeschriebene Satz: „In unserer Anschauung ist ein Polyeder ein räumlicher Körper, der allseitig von Polygonflächen begrenzt wird.“

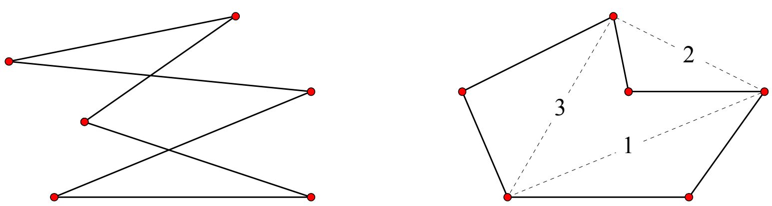
Wenn wir bei Polygonen zunächst nur an Dreiecke denken, kommt ein gutes Gefühl der Machbarkeit auf. Das täuscht uns nicht, wie wir sehen werden. Gehen wir also einmal für einen Moment davon aus, dass wir bereits geklärt hätten, was wir unter einer Dreiecksfläche verstehen wollen.

Wie vertrackt die Angelegenheit im Allgemeinen ist, wird schon deutlich, wenn wir einen weiteren Eckpunkt hinzunehmen. Vierecke zeigen uns sofort, dass es nicht sinnvoll ist, über die Fläche eines Polygons zu sprechen, wenn es nicht eben ist. Betrachten wir dazu ein windschiefes Viereck, also ein Vierecks mit windschiefen Diagonalengeraden:



Je nach Wahl der Diagonalen (in den Figuren durchgehend rot gezeichnet) entstehen zwei verschiedene Dreieckspaare. Welches Paar von Dreiecksflächen soll als Fläche des Vierecks angesehen werden?

Wir sind versucht zu glauben, dass es nicht zu solchen Unklarheiten kommt, wenn wir nur ebene Polygone betrachten. Aber auch bei ebenen Polygonen ist es im Allgemeinen problematisch, von einer Polygonfläche zu sprechen, weil nicht immer geklärt werden kann, welche Punkte innerhalb und welche Punkte außerhalb des Polygons liegen (siehe linke Abbildung).

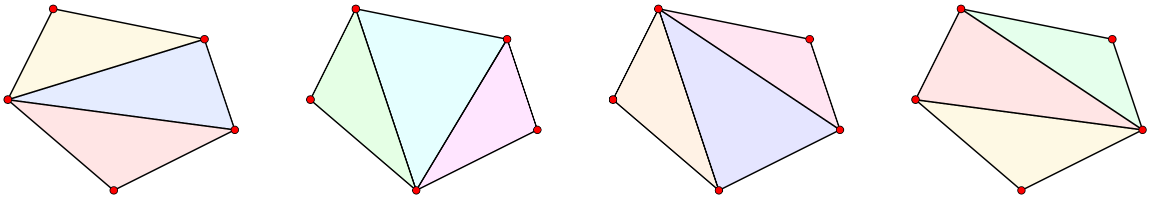


Es drängt sich dann der Gedanke auf, nur solchen Polygonen eine Fläche zuzuordnen, die mit Hilfe von Diagonalen in Dreiecke zerlegt werden können. Allerdings kann ein Polygon in der Regel nicht algorithmisch „trianguliert“ werden – etwa, indem stets die Diagonale benutzt wird, die zum übernächsten Eckpunkt führt (siehe rechte Abbildung).

1 Bildquelle: http://www.bilder-der-mathematik.de/picturebook/pages/picturebook_pages_10_11.pdf

Offensichtlich ist sicherzustellen, dass an einer Triangulierung eines Polygons keine Dreiecke beteiligt sind, die die „eigentliche“ Polygonfläche vergrößern.

Aber selbst dann, wenn das gelingt, stehen wir schließlich vor dem Problem, nachweisen zu müssen, dass unterschiedliche Triangulierungen nicht zu unterschiedlichen Gesamtflächen führen.

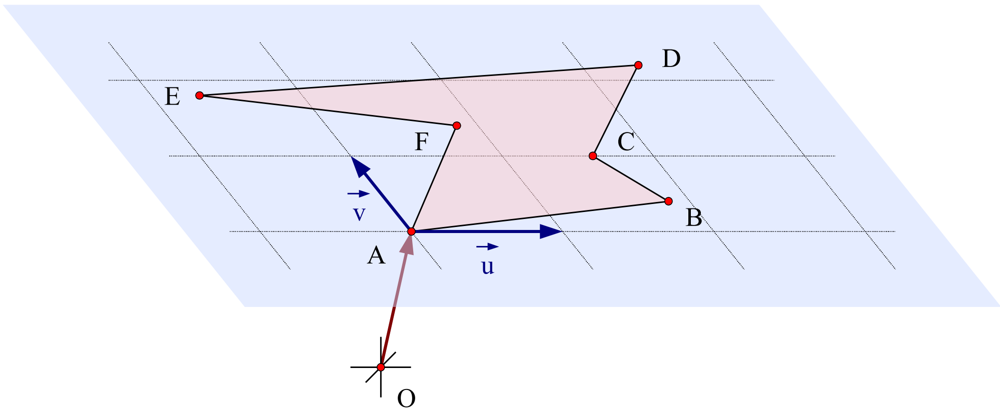


Genug der Problematisierung, wir machen uns auf den Weg!

Im ersten Schritt wird geklärt, wann ein Polygon als „eben“ bezeichnet werden soll. Zu diesem Zweck erinnern wir uns an den Komplanaritätsbegriff, der in Paragraph §9 notiert wurde:

> <u>(9.16) Definition</u>
> Raumpunkte heißen *komplanar*, wenn sie in ein und derselben Ebene liegen.

So wie zwei Punkte immer kollinear sind, sind bis zu drei Punkte stets komplanar. Vier Punkte müssen jedoch nicht komplanar sein, weil es zu jeder Ebene mindestens einen Punkt gibt, den die Ebene nicht enthält (siehe Übung 10.6). Die folgende Abbildung zeigt sechs komplanare Punkte, die ein ebenes Sechseck bilden.

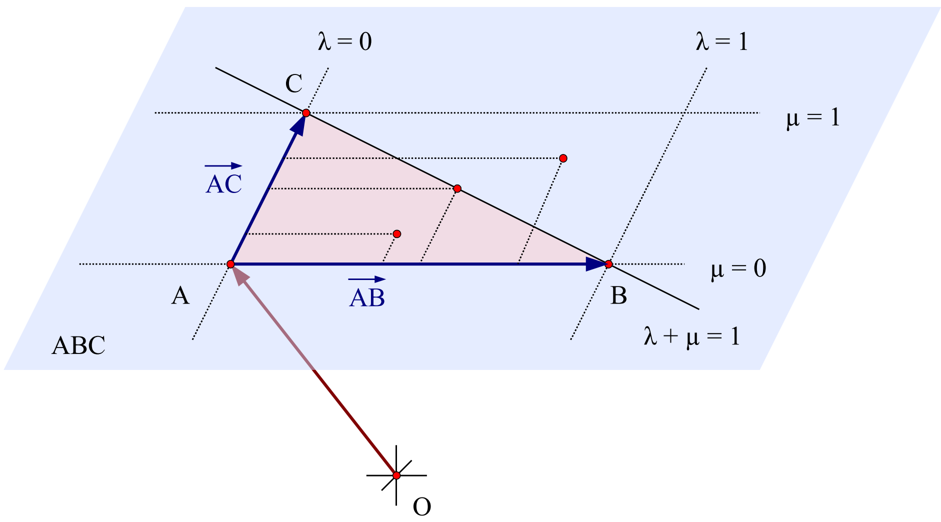


> <u>(13.1) Definition</u>
> Ein Polygon heißt *eben*, wenn seine Eckpunkte komplanar sind.

Offenbar erweitert diese Definition (13.1) in verträglicher Weise die Definition (7.5), in der wir erklärt hatten, was unter einem ebenen Viereck zu verstehen ist. Die gedankliche Brücke bildet die Bemerkung (9.15).

Im zweiten Schritt nehmen wir uns des Begriffs „Fläche eines Dreiecks“ an.

> <u>(13.2) Definition</u>
> Gegeben sei ein Dreieck mit den (nicht kollinearen) Eckpunkten A, B und C.
> Dann werde unter der *Fläche des Dreiecks* $\langle ABC \rangle$ die Menge aller Ebenenpunkte P verstanden, deren Parameterwerte $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ in der Darstellung $\vec{P} = \vec{A} + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$ die folgenden drei Bedingungen erfüllen:
> (1) $0 \le \lambda \le 1$ (2) $0 \le \mu \le 1$ (3) $0 \le \lambda + \mu \le 1$



Die Fläche eines Dreiecks umfasst danach – anschaulich gesprochen – den „Rand“ des Dreiecks, der aus der Vereinigung der drei Seiten des Dreiecks besteht, und das „Innere“ des Dreiecks, das vom Rand eingeschlossen wird.

Die in dieser Anmerkung leichthin benutzten Begriffe „Rand“ und „Inneres“ werden nachfolgend präzisiert; zuvor prüfen wir, ob die Definition (13.2) wirklich „gut“ ist. Das ist sie nämlich nur dann, wenn sie nicht von der Wahl des Stützpunkts der Punktrichtungsgleichung der Ebene ABC abhängt, der in der Definition (13.2) benutzt wird.

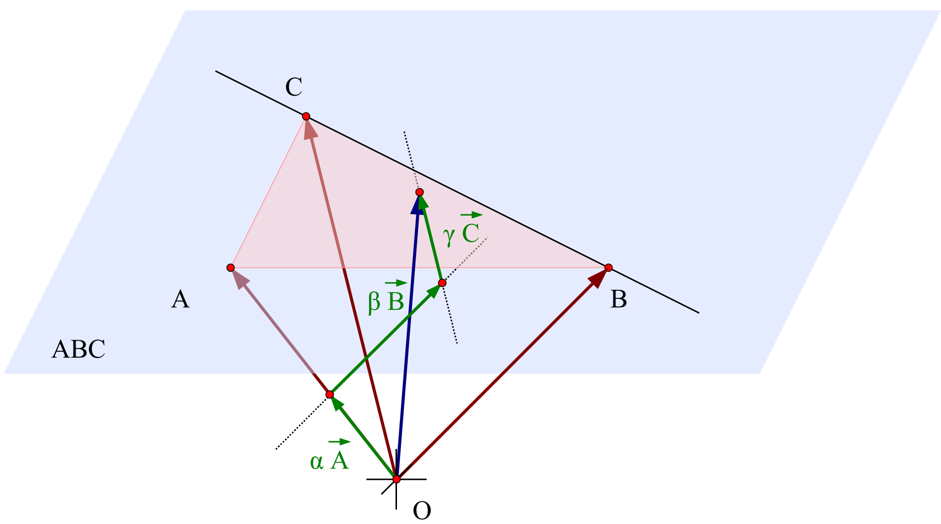
Die Sicherstellung der Validität der Definition (13.2) kann „handwerklich“ (siehe Übung 13.6) erfolgen. Wir nutzen aber diese Gelegenheit zu einer theoretischen **Exkursion** zu den „baryzentrischen“ Ebenengleichungen (Baryzentrum (aus dem Griechischen): „Schwerezentrum“):

Sind A, B und C nicht kollineare Raumpunkte, so wird die Ebene ABC in kanonischer Weise durch die Punktrichtungsgleichung $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$ beschrieben. Diese kann wie folgt umgeformt werden:

$$
\begin{aligned}
X \in ABC \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,(-\vec{A} + \vec{B}) + \mu\,(-\vec{A} + \vec{C}) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{X} = \vec{A} - \lambda\,\vec{A} + \lambda\,\vec{B} - \mu\,\vec{A} + \mu\,\vec{C} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{X} = (1 - \lambda - \mu)\,\vec{A} + \lambda\,\vec{B} + \mu\,\vec{C} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{X} = \nu\,\vec{A} + \lambda\,\vec{B} + \mu\,\vec{C}\text{, wobei } \nu := 1 - \lambda - \mu
\end{aligned}
$$

Da $\nu = 1 - \lambda - \mu \;\Leftrightarrow\; \nu + \lambda + \mu = 1$ dürfen wir folgendes Zugehörigkeitskriterium für die Ebene ABC formulieren:

$$X \in ABC \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{X} = \alpha\,\vec{A} + \beta\,\vec{B} + \gamma\,\vec{C} \;\wedge\; \alpha + \beta + \gamma = 1$$



Der folgende Satz fasst unsere Überlegungen zusammen:

(13.3) Satz

Gegeben seien drei nicht kollineare Raumpunkte A, B und C.

Dann ist ein Raumpunkt X genau dann ein Punkt der Ebene ABC, wenn es Skalare $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\alpha+\beta+\gamma=1$ gibt, sodass $\vec{X}=\alpha\,\vec{A}+\beta\,\vec{B}+\gamma\,\vec{C}$ gilt.

Für jeden Punkt $X \in ABC$ ist das Tripel $(\alpha ; \beta ; \gamma)$ eindeutig bestimmt.

Es ist zu beachten, dass die drei Ortsvektoren $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ nicht linear unabhängig sein müssen; trotzdem sind die „baryzentrischen Koordinaten“ $(\alpha ; \beta ; \gamma)$ jedes Punktes der Ebene ABC eindeutig bestimmt, weil für jeden Ebenenpunkt die „affinen Koordinaten in der Ebene“ $(\lambda ; \mu)$, das heißt, die zum Punkt gehörenden Parameterwerte in der Punktrichtungsgleichung der Ebene ABC eindeutig bestimmt sind.

Im Rahmen der Übung 8.8 wurde gezeigt, wie sich die Koordinaten des Schwerpunkts („Baryzentrum“) S eines Dreiecks $\langle ABC \rangle$ aus den Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks berechnen lassen: $\vec{S}=\frac{1}{3}\,\vec{A}+\frac{1}{3}\,\vec{B}+\frac{1}{3}\,\vec{C}$

Diese Beziehung ist ein Spezialfall des Sachverhalts, der durch den Satz (13.3) beschrieben wird. Das Besondere am Tripel $(\alpha ; \beta ; \gamma)=(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$ ist, dass es die Bedingung $\alpha+\beta+\gamma=1$ nicht „irgendwie“, sondern wegen $\alpha=\beta=\gamma$ „gleichgewichtig“ erfüllt.

(13.4) Definition

Gegeben seien drei nicht kollineare Raumpunkte A, B und C.

Dann heiße die Gleichung $\vec{X}=\alpha\,\vec{A}+\beta\,\vec{B}+\gamma\,\vec{C}$, versehen mit der Bedingung $\alpha+\beta+\gamma=1$, *baryzentrische Gleichung* der Ebene ABC.

Das mit einem Ebenenpunkt korrespondierende Tripel $(\alpha ; \beta ; \gamma)$ werde *baryzentrische Koordinaten* des Punktes genannt.

Die Bedingung $\alpha+\beta+\gamma=1$ darf nicht weggelassen werden, wenn die Ebene ABC baryzentrisch beschrieben wird. Das wird schon dadurch deutlich, dass die Vektoren $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ im Falle linearer Unabhängigkeit eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden und daher den Ortsvektor eines jeden **Raum**punktes X in der Form $\vec{X}=\alpha\,\vec{A}+\beta\,\vec{B}+\gamma\,\vec{C}$ (eindeutig) linear kombinieren können.

Wir beenden jetzt die Exkursion und kehren zur Erörterung des Begriffs „Fläche“ eines Dreiecks $\langle ABC \rangle$ zurück.

Da der Schwerpunkt S eines Dreiecks einerseits die in der Definition (13.2) formulierten Bedingungen für die Zugehörigkeit zur Dreiecksfläche erfüllt, andererseits positive (!) baryzentrische Koordinaten besitzt, die sich in der Summe zu 1 ergänzen, leitet er uns zur folgenden Feststellung:

(13.5) Satz

Gegeben seien drei nicht kollineare Raumpunkte A, B und C.

Ein Punkt P der Ebene ABC gehört genau dann zur Fläche des Dreiecks $\langle ABC \rangle$ gemäß Definition (13.2), wenn seine baryzentrischen Koordinaten $(\alpha ; \beta ; \gamma)$ nicht negativ sind und deswegen aus dem Intervall [0; 1] stammen.

Beweis:

P ist ein Punkt der Fläche des Dreiecks $\langle ABC \rangle$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{P}=\vec{A}+\lambda\,\overrightarrow{AB}+\mu\,\overrightarrow{AC} \;\wedge\; 0 \le \lambda \le 1 \;\wedge\; 0 \le \mu \le 1 \;\wedge\; 0 \le \lambda+\mu \le 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{P}=\vec{A}+\lambda\,(-\vec{A}+\vec{B})+\mu\,(-\vec{A}+\vec{C}) \;\wedge\; 0 \le \lambda \le 1 \;\wedge\; 0 \le \mu \le 1 \;\wedge\; 0 \le \lambda+\mu \le 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{P}=(1-\lambda-\mu)\,\vec{A}+\lambda\,\vec{B}+\mu\,\vec{C} \;\wedge\; 0 \le \lambda \le 1 \;\wedge\; 0 \le \mu \le 1 \;\wedge\; 0 \le \lambda+\mu \le 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in [0 ; 1] \text{ mit } \vec{P}=\alpha\,\vec{A}+\beta\,\vec{B}+\gamma\,\vec{C} \;\wedge\; \alpha+\beta+\gamma=1$$

Dabei verwenden wir im letzten Schritt die Äquivalenzen

$$0 \le \lambda + \mu \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \ge -(\lambda + \mu) \ge -1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \ge 1 - (\lambda + \mu) \ge 0 \,.$$

Offenbar sind unter der Prämisse $\alpha + \beta + \gamma = 1$ die Bedingungen $\alpha, \beta, \gamma \in [0\,;1]$ und $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_0^+$ gleich–bedeutend.

Satz (13.5) stellt klar, dass die Fläche eines Dreiecks $\langle ABC \rangle$ unabhängig von der Wahl des Stützpunktes der Gleichung der Ebene ABC definiert ist. Nebenbei ergibt sich, dass der Schwerpunkt eines Dreiecks immer ein Punkt der Dreiecksfläche ist.

Wir unterscheiden nun zwischen Randpunkten, inneren und äußeren Punkten eines Dreiecks.

(13.6) Definition

Gegeben sei ein Dreieck mit den (nicht kollinearen) Eckpunkten A, B und C.

Dann werde unter dem *Rand des Dreiecks* $\langle ABC \rangle$ die Vereinigung $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ der drei Seiten verstanden. Die Punkte der Ebene ABC, die zum Rand des Dreiecks $\langle ABC \rangle$ gehören, heißen *Randpunkte* des Dreiecks.

Weiterhin sei das *Innere des Dreiecks* $\langle ABC \rangle$ die Menge aller Punkte, die zwar zur Fläche, aber nicht zum Rand des Dreiecks gehören. Diese Punkte werden *innere Punkte* genannt. Wir sagen: „Der Punkt P liegt innerhalb des Dreiecks $\langle ABC \rangle$“, wenn er ein innerer Punkt des Dreiecks ist.

Schließlich sei das *Äußere des Dreiecks* $\langle ABC \rangle$ die Menge aller Punkte der Ebene ABC, die nicht zur Fläche des Dreiecks gehören. Wir sagen: „Der Punkt P liegt außerhalb des Dreiecks $\langle ABC \rangle$“, wenn er ein äußerer Punkt des Dreiecks ist.

Die baryzentrische Gleichung der Dreiecksebene erlaubt uns, den Rand des Dreiecks algebraisch zu erfassen.

(13.7) Bemerkung

Gegeben sei ein Dreieck mit den (nicht kollinearen) Eckpunkten A, B und C.

Ein Punkt P der Fläche des Dreiecks $\langle ABC \rangle$ liegt genau dann auf dem Rand des Dreiecks, wenn mindestens eine seiner drei baryzentrischen Koordinaten den Wert 0 hat.

Beweis:

Sei P ein Punkt der Fläche des Dreiecks $\langle ABC \rangle$ und $(\alpha\,;\beta\,;\gamma)$ seine baryzentrischen Koordinaten.

Dann gilt $\vec{P} = \alpha\,\vec{A} + \beta\,\vec{B} + \gamma\,\vec{B}$ und $\alpha + \beta + \gamma = 1$ und $\alpha, \beta, \gamma \in [0\,;1]$.

Nun folgt der Reihe nach:

$$\begin{aligned} \alpha = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{P} = \beta\,\vec{B} + \gamma\,\vec{C} \text{ und } \beta + \gamma = 1 \text{ und } \beta, \gamma \in [0\,;1] \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{P} = (1-\gamma)\,\vec{B} + \gamma\,\vec{C} \text{ und } \gamma \in [0\,;1] \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{P} = \vec{B} - \gamma\,\vec{B} + \gamma\,\vec{C} \text{ und } \gamma \in [0\,;1] \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{P} = \vec{B} + \gamma\,\overrightarrow{BC} \text{ und } \gamma \in [0\,;1] \\ &\Leftrightarrow \quad P \in \overline{BC} \end{aligned}$$

Entsprechend verschwindet die Koordinate β bzw. γ genau dann, denn P zur Seite $\overline{AC}$ bzw. $\overline{AB}$ gehört.

Es ist übrigens klar, dass ein Punkt P der Fläche des Dreiecks $\langle ABC \rangle$ mit einem Eckpunkt übereinstimmen muss, wenn eine seiner baryzentrischen Koordinaten den Wert 1 hat:

Unter der Bedingung $\alpha + \beta + \gamma = 1 \;\wedge\; \alpha, \beta, \gamma \in [0\,;1]$ folgt beispielsweise aus $\alpha = 1$ sofort $\beta = 0 \;\wedge\; \gamma = 0$. Das bedeutet aber, dass P = A gilt.

Als Folgerung aus der Bemerkung (13.7) erhalten wir ein algebraisches Kriterium für die inneren (und entsprechend für die äußeren) Punkte eines Dreiecks.

(13.8) Korollar

Gegeben sei ein Dreieck mit den (nicht kollinearen) Eckpunkten A, B und C.

Ein Punkt P der Dreiecksfläche des Dreiecks $\langle ABC \rangle$ liegt genau dann im Innern des Dreiecks, wenn keine seiner drei baryzentrischen Koordinaten verschwindet.

Der Schwerpunkt eines Dreiecks mit nicht kollinearen Eckpunkten ist also immer ein innerer Punkt des Dreiecks.

Zur Übung wird empfohlen, den Beweis der folgenden eher nebensächlichen Anmerkung (Übung 13.7) auszuführen:

(13.9) Bemerkung

Die Eckpunkte eines Dreiecks $\langle ABC \rangle$ sind genau dann nicht kollinear, wenn sein Inneres nicht leer ist.

Der dritte Schritt auf unserem Weg zum Begriff „Polyeder“ erläutert nun, unter welchen Bedingungen von der Fläche eines Polygons gesprochen werden kann und wie diese definiert ist.

(13.10) Definition

Ein ebenes (!) Polygon heißt *triangulierbar*, wenn es eine endliche Menge $\mathfrak{T}$ von Dreiecken mit nicht kollinearen Eckpunkten gibt, die die folgende Eigenschaft hat:

(1) Alle drei Seiten eines jeden Dreiecks aus der Menge $\mathfrak{T}$ sind Seiten oder Diagonalen des Polygons.

(2) Zu jeder Seite s des Polygons gibt es in der Menge $\mathfrak{T}$ genau ein Dreieck, das s als Seite besitzt.

(3) Ist eine Seite eines Dreiecks aus der Menge $\mathfrak{T}$ eine Diagonale des Polygons, so gibt es genau ein zweites Dreieck aus der Menge $\mathfrak{T}$, das auch diese Diagonale als Seite besitzt.

(4) Ist P ein innerer Punkt eines Dreiecks aus der Menge $\mathfrak{T}$, so gibt es kein zweites Dreieck in $\mathfrak{T}$, das P als inneren Punkt besitzt.

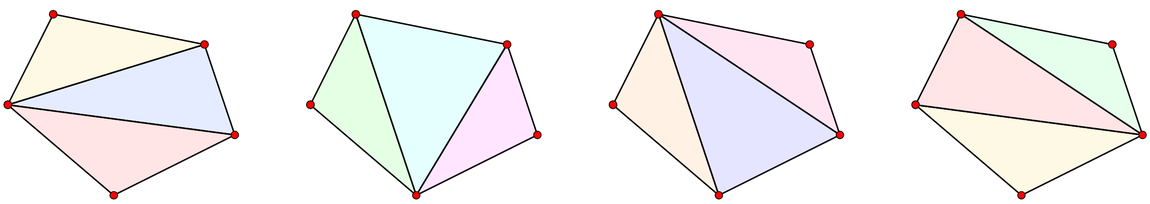
Eine Menge $\mathfrak{T}$ wird, wenn sie die geforderten Eigenschaften aufweist, *Triangulierung* des Polygons genannt.

(13.11) Definition

Gegeben sei ein triangulierbares ebenes Polygon. Dann heißt die Vereinigung aller Dreiecksflächen, die an der Triangulierung beteiligt sind, *Fläche des Polygons*.

- Ein Punkt der Polygonfläche heißt *Randpunkt des Polygons*, wenn er auf einer Seite des Polygons liegt.
- Ein Punkt der Polygonfläche heißt *innerer Punkt des Polygons*, wenn er kein Randpunkt ist.
- Ein Punkt der Polygonebene (!) heißt *äußerer Punkt des Polygons*, wenn er nicht zur Polygonfläche gehört.

Weil triangulierbare Polygone in der Regel auf vielfältige Weise trianguliert werden können, ist zu zeigen, dass die Fläche eines Polygons nicht von der gewählten Triangulierung abhängt. Die einschlägigen Überlegungen zu diesem Problem werden in einen Anhang zu diesem Paragraphen ausgegliedert.



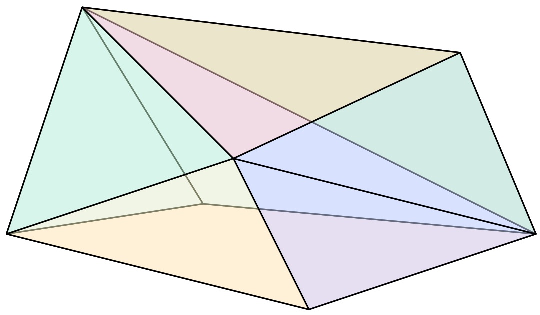
Möglicherweise wird durch die Grafik, die wir bereits eingangs zeigten, der Blick auf das Problem verstellt. Wenn wir aber die folgende Aufgabe betrachten, wird sofort klar, welche Schwierigkeit vorliegt:

Gegeben ist das Pentagon $\langle ABCDE \rangle$ durch die Punkte

$$A=(6;-3;8),\ B=(10;-5;3),\ C=(9;-4;12),\ D=(-11;4;1),\ E=(2;-3;-18).$$

Prüfe, ob der Punkt $P=(-7;2;-9)$ ein innerer Punkt des Pentagons ist!

Ohne weitere Umschweife wird jetzt mit den getroffenen Vorbereitungen die Definition des Begriffs „Polyeder“ angegangen.



(13.12) Definition

Sei $\mathcal{P}$ eine Menge von n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, triangulierbaren ebenen Polygonen, die folgende Bedingungen erfüllt:

(1) Ist p eine Polygon aus $\mathcal{P}$, so gibt es zu jeder Seite s von p genau ein von p verschiedenes Polygon q aus $\mathcal{P}$, das ebenfalls die Seite s besitzt.

(2) Ist P ein innerer Punkt eines Polygons der Menge $\mathcal{P}$, so gibt es kein zweites Polygon in der Menge $\mathcal{P}$, in dessen Fläche der Punkt P liegt.

Dann heißt $\mathcal{P}$ *n-seitiges Polyeder*.

Die Flächen der in $\mathcal{P}$ enthaltenen Polygone heißen *Seiten* oder *Seitenflächen* des Polyeders.

Die Ebenen, in denen die Seiten des Polyeders liegen, heißen *Seitenebenen* des Polyeders.

Die Strecken, die je zwei aneinandergrenzende Seiten gemeinsam besitzen, heißen *Kanten* des Polyeders.

Die Geraden, die eine Kante des Polyeders enthalten, heißen *Kantengeraden* des Polyeders.

Die Punkte, in denen zwei Kanten aufeinanderstoßen, heißen *Eckpunkte* des Polyeders.

Diagonalen der Seitenflächen heißen *Flächendiagonalen* des Polyeders.

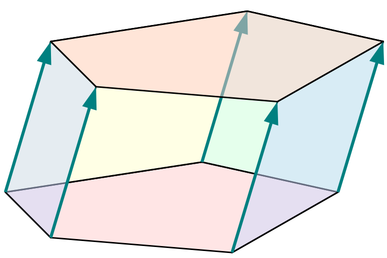
Strecken, die zwei Ecken verbinden, aber weder Kanten noch Flächendiagonalen des Polyeders sind, heißen *Raumdiagonalen* des Polyeders.

Ist die Anzahl der Seiten konkret gegeben, spricht man von einem Tetraeder (Vierflach), Pentaeder (Fünfflach), Hexaeder (Sechsflach) usw.

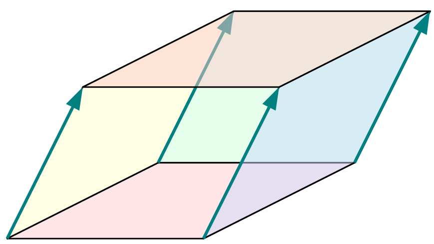
Polyeder entstehen gemäß Definition (13.12) durch „Verbinden“ von Polygonflächen. Diese Konstruktion hinterlässt jedoch eine gewisse Unzufriedenheit, weil wir Polyeder, anschaulich betrachtet, als „Körper“ verstehen, die ein „Volumen“ haben. Die Definition (13.12) konstruiert aber nur die Oberfläche dieser Körper.

Vermutlich wären wir glücklicher, wenn wir bei Polyedern auf einfache Weise zwischen „inneren“ und „äußeren“ Punkten unterscheiden könnten; denn dann könnten wir den Körper eines Polyeders als die Menge aller Punkte definieren, die im Innern oder auf dem Rand des Polyeders liegen. Eine Formulierung des gewünschten Unterscheidungskriteriums ist aber eine nicht zu unterschätzende theoretische Herausforderung!

Wir verzichten auf eine umfassende Klärung des Sachverhalts ohne schlechtes Gewissen, weil in der weiteren Entwicklung unserer Theorie nur Sonderformen von Polyedern eine Rolle spielen werden, bei denen wir zwischen inneren und äußeren Punkten klar unterscheiden können.



Prisma



Spat

<u>(13.13) Definition</u>

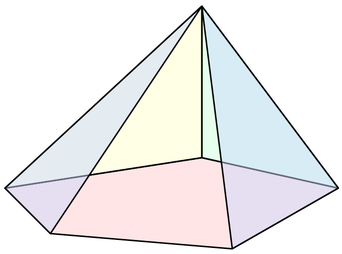
Ein Polyeder heißt *n-seitiges Prisma*, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, wenn es aus n+2 Polygonen mit folgenden Eigenschaften besteht:

- Es gibt zwei („kongruente“) ebene Polygone mit jeweils n Eckpunkten, die über eine durch einen Vektor erzeugte Translation wechselseitig aufeinander abgebildet werden können. Die beiden Polygone heißen *Grundseiten* des Prismas.
- Neben den beiden Grundseiten gehören zu dem Polyeder n Parallelogramme, die jeweils durch zwei benachbarte Eckpunkte einer der beiden Grundseiten und den mit ihnen korrespondierenden Bildpunkten in der anderen Grundseite gebildet werden.

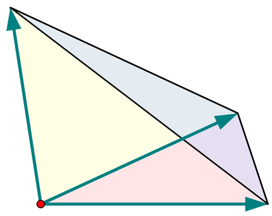
<u>(13.14) Definition</u>

Ein vierseitiges Prisma, dessen Grundseiten ebenfalls Parallelogramme sind, heißt *Spat*.

Offensichtlich genügt ein Prisma der Definition (13.12), weil die Menge der n+2 Polygone, die ein n-seitiges Prisma bilden, die beiden Definitionsbedingungen erfüllt. Das gleiche gilt für Pyramiden:



Pyramide



Tetraeder

<u>(13.15) Definition</u>

Ein Polyeder, das durch Verbinden der Eckpunkte eines ebenen n-seitigen Polygons, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, mit einem nicht zur Polygonebene gehörenden Raumpunkt entsteht, heißt *n-seitige Pyramide*.

Die Seite der Pyramide, die durch das ebene Polygon gebildet wird, heißt *Grundseite* der Pyramide.

Der außerhalb liegende Raumpunkt heißt *Spitze* der Pyramide.

Ein Tetraeder kann offenbar stets als dreiseitige Pyramide aufgefasst werden. Das Tetraeder ist der Polyedertyp, der die kleinste Anzahl von Ecken aufweist. Es ist das geometrische Objekt, das in kanonischer Weise durch vier nicht komplanare Punkte festgelegt wird.

Vier nicht komplanare Punkte erzeugen drei linear unabhängige Vektoren. Offensichtlich kann daher ein Tetraeder im Modellraum auch durch einen „Quellpunkt“ und drei linear unabhängige Vektoren konstruiert werden.

Jedes Prisma und jede Pyramide lässt sich in Tetraeder zerlegen. Berechnungsverfahren, die für Tetraeder entwickelt werden, liefern daher auch Lösungen für komplexe Körper. Auf diesen Aspekt wird in späteren Paragraphen näher eingegangen.

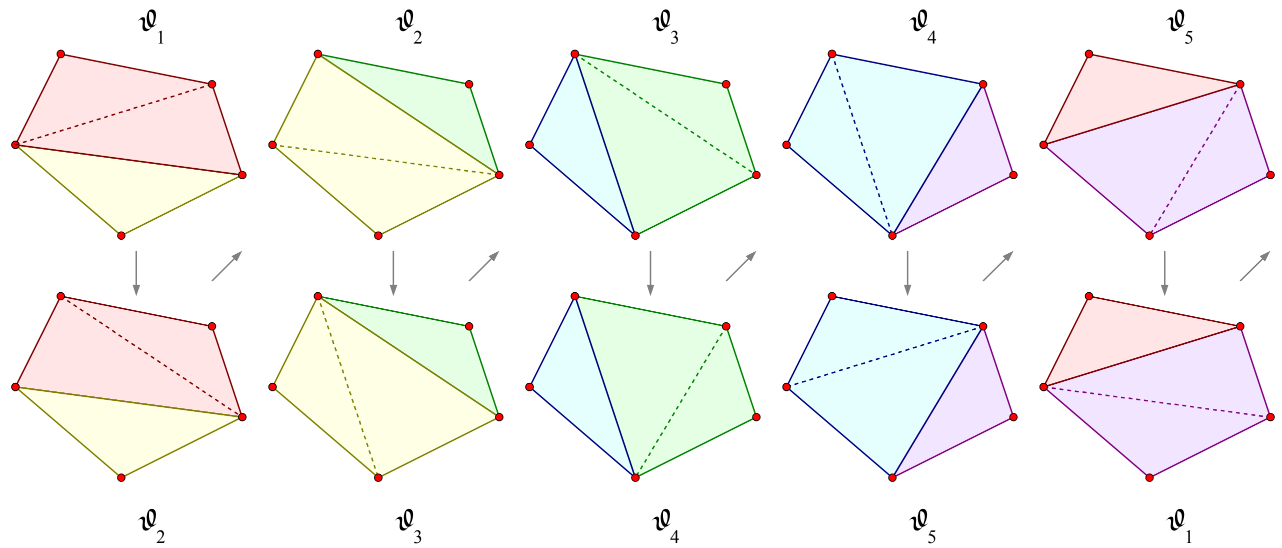
Dieser Paragraph zeigt im Haupttext und im folgenden Anhang bewusst Grenzen unserer naiven Modellbildungskompetenz auf. Er macht uns klar, dass bei der Entwicklung einer mathematischen Theorie grundsätzlich Demut angebracht ist.

Aber wir verzagen nicht. Im folgenden Paragraphen wird es uns gelingen, einen neuen tragfähigen Boden in unseren Modellbau einzuziehen, auf dem die Theorie des geometrischen Messens entwickelt werden kann. Erstaunliche Ergebnisse mit großer praktischer Relevanz werden die Folge sein.

Anhang zu §13

Die nachfolgenden Überlegungen widmen sich der offenen Frage, ob in der Definition (13.2) die Fläche eines triangulierbaren ebenen Polygons unabhängig von der gewählten Triangulierung des Polygons erklärt ist.

Vorab konkreter Schritte skizzieren wir einen möglichen Weg zu einer Problemlösung. Dazu betrachten wir die fünf möglichen Triangulierungen eines Pentagons in der folgenden Abbildung.



In der ersten Triangulierung $\mathfrak{T}_1$ betrachten wir zunächst das linke obere, rot unterlegte Dreieck. Zwei seiner Seiten decken sich mit zwei Seiten des Pentagons, eine Seite (gestrichelt gezeichnet) ist eine Diagonale des Pentagons.

In der Definition (13.10) hatten wir gefordert, dass es in einer Triangulierung immer genau ein zweites Dreieck geben muss, das eine in die Triangulierung einbezogene Diagonale ebenfalls als Seite besitzt. Dieses zweite Dreieck haben wir in der obigen Illustration ebenfalls rot unterlegt.

Die beiden rot unterlegten Dreiecke bilden das rot unterlegte Viereck. Dieses Viereck besitzt die in die Triangulierung einbezogene Pentagondiagonale ebenfalls als Diagonale. Nun besitzt aber ein Viereck immer zwei Diagonalen.

Nehmen wir an, dass die zweite Diagonale des rot unterlegten Vierecks die erste, so wie es in der Grafik angelegt ist, schneidet. Dann kann das Viereck auch über die zweite Diagonale trianguliert werden. Schneiden sich die Diagonalen nicht, kann das Viereck durch die zweite Diagonale nicht trianguliert werden (Eine Begründung hierzu folgt später).

Der Wechsel der Diagonalen, die das rot unterlegte Viereck teilen, führt zu einem Übergang von der Triangulierung $\mathfrak{T}_1$ zur Triangulierung $\mathfrak{T}_2$.

Könnten wir nun beweisen, dass die Fläche eines Vierecks immer unabhängig von der Wahl der triangulierenden Diagonalen definiert ist, dann würde das bedeuten, dass die durch die Triangulierungen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ definierten Flächen des Pentagons identisch sind.

Mit der gleichen Argumentation, mit der wir begründen, dass die Triangulierungen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ die gleiche Fläche erzeugen, können wir auch erschließen, dass die Triangulierungen $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_3$ dieselben Flächen des Pentagons definieren.

Es ist nur das Dreieck zu wechseln, das mit einem Partner zu einem Viereck vereinigt wird. Das ist in der obigen Grafik das obere gelb unterlegte Dreieck. Seine gestrichelt gezeichnete Seite ist eine Pentagondiagonale; deshalb ist die Existenz eines zweiten Dreiecks (ebenfalls gelb unterlegt) in der Triangulierung $\mathfrak{T}_2$, das auch diese Diagonale als Seite besitzt, gesichert.

Ist nun bewiesen, dass ein Wechsel der teilenden Diagonalen die Fläche eines Vierecks nicht verändert, dann müssen auch die durch die Triangulierungen $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_3$ definierten Flächen des Pentagons identisch sein.

Die Grafik zeigt, dass der fortlaufende Wechsel des Dreiecks, das mit einem Partner zu einem Viereck vereinigt wird, dazu führt, das alle Triangulierungen über jeweils einen Diagonalenwechsel in einem Viereck nachgerade miteinander assoziiert sind. Diese Diagonalenwechsel verändern aber die durch die Triangulierungen definierte Gesamtfläche nicht, falls wir, wie nun schon mehrfach erwähnt, tatsächlich zeigen können, dass die Fläche eines Vierecks unabhängig von der triangulierenden Diagonalen definiert ist.

Für die Umsetzung unserer Lösungsidee ist daher der folgende Satz der „Dreh- und Angelpunkt“:

(13.A1) Satz

Sei $\langle ABCD \rangle$ ein Viereck, in dem sich die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ in einem Punkt S schneiden.

Dann ist die Fläche des Vierecks unabhängig von der Wahl der triangulierenden Diagonalen definiert.

Begründung:

Sei f_1 die Fläche des Vierecks, die sich aus der Triangulierung mit Hilfe der Diagonalen $\overline{AC}$ ergibt (linke Figur) und f_2 die Fläche des Vierecks, die sich aus der Triangulierung mit Hilfe der Diagonalen $\overline{BD}$ ergibt (rechte Figur). Zu zeigen ist dann, dass dann $f_1 = f_2$ gilt.

Wir weisen nur nach, dass $f_1 \subset f_2$ korrekt ist. Die Argumentation, die dieses Ergebnis liefert, kann durch Austausch von Bezeichnungen wortgleich für den Nachweis von $f_2 \subset f_1$ verwendet werden. Beide Inklusionen ergeben zusammen genommen dann $f_1 = f_2$.

Sei also P ein Punkt von f_1.

Dann ist P ein Punkt der Fläche des Dreiecks $\langle ABC \rangle$ oder ein Punkt der Fläche des Dreiecks $\langle ACD \rangle$.

Wir zeigen für den ersten Fall, dass P ein Punkt von f_2 sein muss; der zweite erledigt sich völlig analog.

Sei also P ein Punkt der Fläche des Dreiecks $\langle ABC \rangle$.

Dann wäre es für den Fortgang des Beweises günstig, wenn wir jetzt behaupten könnten, dass P entweder ein Punkt der Fläche des Teildreiecks $\langle ABS \rangle$ oder ein Punkt der Fläche des Teildreiecks $\langle BCS \rangle$ sein muss.

Es ist exakt der Inhalt des nachlaufenden Lemmas (13.A2), das diese Schlussmöglichkeit eröffnet: Die Fläche eines Dreiecks stimmt mit der Vereinigung der Flächen der beiden Teildreiecke überein, die durch eine (von einem Eckpunkt ausgehenden) Teilung des Dreiecks gebildet werden.

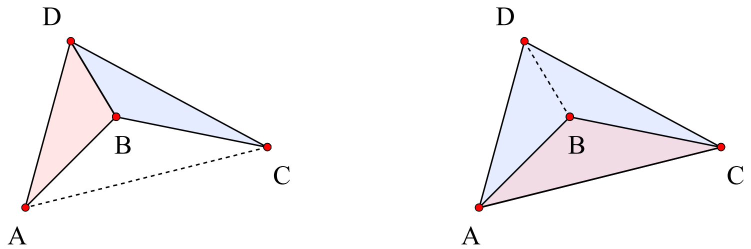
Wir argumentieren nun im Folgenden unter fortwährender Verwendung von Lemma (13.A2):

- Ist P ein Punkt der Fläche des Teildreiecks $\langle ABS \rangle$, so ist P ein Punkt der Fläche des Dreiecks $\langle ABD \rangle$.
- Ist P ein Punkt der Fläche des Teildreiecks $\langle BCS \rangle$, so ist P ein Punkt der Fläche des Dreiecks $\langle BCD \rangle$.

In jedem Fall ist P ein Punkt von f_2. Das war zu zeigen!

In der Begründung wird bewusst das inklusive „oder“ verwendet, weil ein Punkt, der sowohl in der Fläche des Dreiecks $\langle ABS \rangle$ als auch in der Fläche des Dreiecks $\langle BCS \rangle$ liegt, ein Punkt der Seite $\overline{BS}$ sein muss. Diese ist aber ein Teil der gemeinsamen Seite $\overline{BD}$ der Dreiecke $\langle ABD \rangle$ und $\langle BCD \rangle$. Also gehört er auch in diesem Fall zur Fläche f_2.

Es gibt natürlich ebene Vierecke, bei denen der Satz (13.A1) nicht anwendbar ist, weil sich die Diagonalen nicht schneiden. Diese Vierecke können nur mit Hilfe von einer der beiden Diagonalen trianguliert werden, weil andernfalls die Triangulierungsbedingung (4) der Definition (13.10) verletzt wird. Diese Einschränkung auf eine Triangulierung sorgt aber bereits dafür, dass die Fläche des Vierecks wohldefiniert ist.



Würde die Diagonale $\overline{AC}$ zur Triangulierung des Vierecks benutzt, hätten die Dreiecke $\langle ABC \rangle$ und $\langle ACD \rangle$ gemeinsame innere Punkte. Das erlaubt aber die Definition (13.10) nicht!

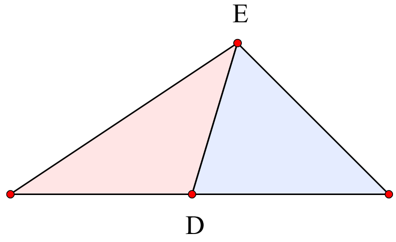
Die Begründung von Satz (13.A1) ist natürlich nur dann gültig, wenn wir das im Beweis von Satz (13.A1) angekündigte Lemma (13.A2) bewiesen haben.

<u>(13.A2) Lemma</u>

Gegeben sei im Modellraum ein Dreieck.

Ist E einer der drei Eckpunkte des Dreiecks und D ein Punkt auf der E gegenüber liegenden Seite des Dreiecks, dann ergänzen sich die Flächen der beiden Teildreiecke, die die Transversale $\overline{ED}$ erzeugt, zur Fläche des Dreiecks.

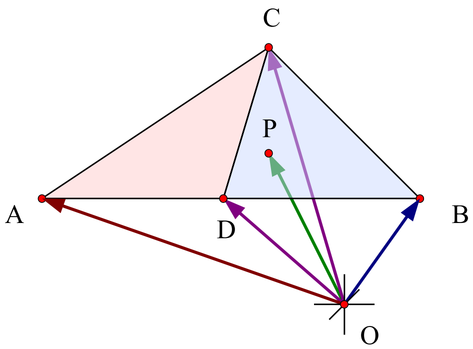
Den Flächen der beiden Teildreiecke sind nur die Punkte der Transversalen $\overline{ED}$ gemeinsam.



Die Bezeichnungen im Lemma (13.A2) zielen auf allgemeine Verwendbarkeit ab. Für den nachfolgenden Beweis wählen wir die Bezeichnungen in gewohnt praktischer Weise.

Beweis:

Wir betrachten ein Dreieck aus drei nicht kollinearen Punkten A, B und C sowie einen Punkt D auf der Seite $\overline{AB}$, der von den Eckpunkten A und B verschieden sei.



Wir müssen nun zeigen, dass die Vereinigung der Flächen der Teildreiecke $\langle ADC \rangle$ und $\langle DBC \rangle$ mit der Fläche des Dreiecks $\langle ABC \rangle$ übereinstimmt.

Zunächst sichern wir ab, dass die Teildreiecke durch nicht kollineare Eckpunkte gebildet werden. Das ist korrekt, weil der Punkt D weder mit A noch mit B zusammenfällt und der Punkt C nicht auf der Geraden AB liegt.

Die Ebenen ADC und DBC sind daher wohldefiniert und natürlich identisch mit der Ebene ABC.

Gemäß Voraussetzung über den Punkt D gibt es einen Skalar $\rho \in]0;1[$ mit $\vec{D} = \vec{A} + \rho\,\overrightarrow{AB}$ und einen Skalar $\sigma \in]0;1[$ mit $\vec{D} = \vec{B} + \sigma\,\overrightarrow{BA}$.

Aus den beiden Darstellungen des Vektors $\vec{D}$ ergibt sich eine Gleichung, die wir passend umformen:

$$\vec{A} + \rho\,\overrightarrow{AB} = \vec{B} + \sigma\,\overrightarrow{BA} \;\Leftrightarrow\; \rho\,\overrightarrow{AB} + \sigma\,\overrightarrow{AB} = -\vec{A} + \vec{B} \;\Leftrightarrow\; (\rho + \sigma)\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

Daraus folgt $\sigma + \rho = 1$ und unter Verwendung dieser Beziehung die folgende Darstellung des Vektors $\vec{D}$:

$$\vec{D} = \vec{A} + \rho\,\overrightarrow{AB} = \vec{A} - \rho\,\vec{A} + \rho\,\vec{B} = (1-\rho)\,\vec{A} + \rho\,\vec{B} = \sigma\,\vec{A} + \rho\,\vec{B}\text{ , wobei } \rho, \sigma \in]0;1[\text{ und } \sigma + \rho = 1$$

Zuerst weisen wir nun nach, dass jeder Punkt der Fläche von $\langle ADC \rangle$ ein Punkt der Fläche von $\langle ABC \rangle$ ist.

Sei also P ein Punkt der Fläche von $\langle ADC \rangle$.

Dann gibt es $\alpha, \delta, \gamma \in [0;1]$ mit $\alpha + \delta + \gamma = 1$, sodass $\vec{P} = \alpha\,\vec{A} + \delta\,\vec{D} + \gamma\,\vec{C}$ gilt.

Daraus ergibt sich aber sofort: $\vec{P} = \alpha\,\vec{A} + \delta\,\vec{D} + \gamma\,\vec{C} = \alpha\,\vec{A} + \delta(\sigma\,\vec{A} + \rho\,\vec{B}) + \gamma\,\vec{C} = (\alpha + \delta\sigma)\,\vec{A} + \delta\rho\,\vec{B} + \gamma\,\vec{C}$

Da $(\alpha + \delta\sigma) + \delta\rho + \gamma = \alpha + \delta(\sigma + \rho) + \gamma = \alpha + \delta \cdot 1 + \gamma = 1$ gilt, ist $\vec{P} = (\alpha + \delta\sigma)\,\vec{A} + \delta\rho\,\vec{B} + \gamma\,\vec{C}$ die baryzentrische Darstellung von P in der Ebene ABC. Da offensichtlich alle drei baryzentrischen Koordinaten positiv sind, muss P ein Punkt der Fläche des Dreiecks $\langle ABC \rangle$ sein.

Analog erfolgt der Nachweis, dass jeder Punkt der Fläche von $\langle DBC \rangle$ ein Punkt der Fläche von $\langle ABC \rangle$ ist.

Nachfolgend werden wir umgekehrt zeigen, dass jeder Punkt der Fläche von $\langle ABC\rangle$ ein Punkt der Fläche von $\langle ADC\rangle$ oder der Fläche von $\langle DBC\rangle$ ist.

Sei also P ein Punkt der Fläche von $\langle ABC\rangle$.

Liegt P auf einer der drei Seiten des Dreiecks $\langle ABC\rangle$, ist die Behauptung trivialer Weise richtig.

Sei also P ein Punkt aus dem Innern des Dreiecks $\langle ABC\rangle$.

Ist $\vec{P}=\alpha\,\vec{A}+\beta\,\vec{B}+\gamma\,\vec{C}$ die baryzentrische Darstellung von P, so gilt $\alpha+\beta+\gamma=1$ und $\alpha,\beta,\gamma\in\,]0;1[$.

Da nach Voraussetzung $\rho,\sigma\in\,]0;1[$ gilt, kann die Gleichung $\vec{D}=\sigma\,\vec{A}+\rho\,\vec{B}$ sowohl nach $\vec{A}$ als auch nach $\vec{B}$ aufgelöst werden:

$$\vec{A}=\frac{1}{\sigma}\vec{D}-\frac{\rho}{\sigma}\vec{B} \qquad\qquad \vec{B}=\frac{1}{\rho}\vec{D}-\frac{\sigma}{\rho}\vec{A}$$

Unter Verwendung dieser Auflösungen erhalten wir die baryzentrische Darstellung von P in der Ebene ADC

$$\vec{P}=\alpha\,\vec{A}+\beta\,\vec{B}+\gamma\,\vec{C}=\alpha\,\vec{A}+\beta\,(\frac{1}{\rho}\vec{D}-\frac{\sigma}{\rho}\vec{A})+\gamma\,\vec{C}=(\alpha-\beta\frac{\sigma}{\rho})\,\vec{A}+\beta\frac{1}{\rho}\,\vec{D}+\gamma\,\vec{C}\,, \qquad (*)$$

weil $\alpha-\beta\frac{\sigma}{\rho}+\beta\frac{1}{\rho}+\gamma=\alpha+\beta\,(\frac{1}{\rho}-\frac{\sigma}{\rho})+\gamma=\alpha+\beta\,\frac{1-\sigma}{\rho}+\gamma=\alpha+\beta+\gamma=1$ gilt,

sowie die baryzentrische Darstellung von P in der Ebene DBC

$$\vec{P}=\alpha\,\vec{A}+\beta\,\vec{B}+\gamma\,\vec{C}=\alpha\,(\frac{1}{\sigma}\vec{D}-\frac{\rho}{\sigma}\vec{B})+\beta\,\vec{B}+\gamma\,\vec{C}=(\beta-\alpha\frac{\rho}{\sigma})\,\vec{B}+\alpha\frac{1}{\sigma}\,\vec{D}+\gamma\,\vec{C}\,, \qquad (**)$$

weil $\beta-\alpha\frac{\rho}{\sigma}+\alpha\frac{1}{\sigma}+\gamma=\beta+\alpha\,(\frac{1}{\sigma}-\frac{\rho}{\sigma})+\gamma=\alpha\,\frac{1-\rho}{\sigma}+\beta+\gamma=\alpha+\beta+\gamma=1$ gilt.

In der Gleichung (*) sind die beiden Koordinaten $\beta\frac{1}{\rho}$ und γ und in der Gleichung (**) die beiden Koordinaten $\alpha\frac{1}{\sigma}$ und γ garantiert positiv.

Für die dritte Koordinate in Gleichung (*) gilt:

$$\alpha-\beta\frac{\sigma}{\rho}<0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha<\beta\frac{\sigma}{\rho} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha\frac{\rho}{\sigma}<\beta \quad\Leftrightarrow\quad 0<\beta-\alpha\frac{\rho}{\sigma}$$

Das bedeutet, dass P, unserer Anschauung entsprechend, im Innern von $\langle DBC\rangle$ liegt, wenn P nicht zur Fläche von $\langle ADC\rangle$ gehört.

In jedem Fall liegt aber der Punkt P in der Vereinigung der Flächen der Dreiecke $\langle ADC\rangle$ und $\langle DBC\rangle$.

Das wollten wir zeigen!

Die erarbeiteten Ergebnisse veranlassen uns, die folgende Behauptung (13.A3) als richtig anzusehen. Gleichwohl geben wir zu, dass weiterhin bestehende Unsicherheiten beseitigt werden müssten, damit von einer unangefochtenen Gültigkeit die Rede sein dürfte. Insbesondere müsste sorgfältig herausgearbeitet werden, dass je zwei Triangulierungen eines Polygons über eine Kette von Diagonalenwechseln, die jeweils in Teilvierecken stattfinden, miteinander assoziiert sind.

<u>(13.A3) Satz</u>

Die Fläche eines triangulierbaren ebenen Polygons ist unabhängig von der Wahl der Triangulierung definiert.