Übung 11.1

(a) $Q \in e \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &(1) \quad 4\lambda - 2\mu = -16 \\ &[(2) \quad -\lambda + \mu = 5\,] \\ &(3) \quad 6\lambda + 2\mu = 14 \end{aligned}$$

$(1)+(3)$: $10\lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{5}$ $\quad(4)$

$(4) \to (1)$: $-\frac{4}{5} - 2\mu = -16 \Leftrightarrow -2\mu = -\frac{76}{5} \Leftrightarrow \mu = \frac{38}{5}$ $\quad(5)$

$(4),(5) \to (2)$: $-\left(-\frac{1}{5}\right) + \frac{38}{5} = 5$ $\quad$ [falsch]

Q ist kein Punkt von e

(b) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\qquad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 4-2 \\ -1+1 \\ 6+2 \end{pmatrix}$

Alle drei Geraden verlaufen durch den Punkt Q.
Da ihre Richtungsvektoren Linearkombinationen der Richtungsvektoren der Ebene e sind, müssen sie parallel zu e verlaufen.
Da ihre Richtungsvektoren paarweise linear unabhängig sind, können keine zwei Geraden identisch sein.

Übung 11.2

Wir untersuchen in jeder Teilaufgabe zunächst, ob der Richtungsvektor der Geraden aus den Richtungsvektoren der Ebene linear kombiniert werden kann.
Nur wenn das nicht der Fall ist, unternehmen wir eine Schnittpunktberechnung.

(a) $\begin{pmatrix}5\\4\\-6\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-3\\3\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

(1) $-3\lambda = 5 \iff \lambda = -\frac{5}{3}$

(2) $3\lambda + \mu = 4$

[(3) $-2\lambda + 3\mu = -6$]

(1) → (2): $3\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) + \mu = 4 \iff \mu = 9$ (4)

(1),(4) → (3): $-2\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) + 3\cdot 9 = -6$ [falsch]

Schnittpunktansatz (verkürzt):

(1) $-3\lambda + 0\mu - 5\rho = -16 \iff -54\lambda - 90\rho = -288$

(2) $3\lambda + 1\mu - 4\rho = -5 \iff -9\lambda - 3\mu + 12\rho = 15$

(3) $-2\lambda + 3\mu + 6\rho = -1$

(2)+(3): $-11\lambda + 18\rho = 14 \iff -55\lambda + 90\rho = 70$ (4)

(1)+(4): $-109\lambda = -218 \iff \lambda = 2$ (5)

(5) → (1): $-3\cdot 2 - 5\rho = -16 \iff -5\rho = -10 \iff \rho = 2$ (6)

(5),(6) → (3): $-2\cdot 2 + 3\mu + 6\cdot 2 = -1 \iff 3\mu = -9 \iff \mu = -3$

g und e schneiden sich im Punkt S mit $\vec{S} = \begin{pmatrix}-12\\-7\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}5\\4\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-12\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}12\\-14\\2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-3\\3\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

(1) $-3\lambda = 12 \iff \lambda = -4$

(2) $3\lambda + \mu = -14$

[(3) $-2\lambda + 3\mu = 2$]

(1) → (2): $-12 + \mu = -14 \iff \mu = -2$ (4)

(1),(4) → (3): $-2\cdot(-4) + 3\cdot(-2) = 2$ [wahr]

g liegt in der Ebene e oder verläuft parallel zu e.

Punktprobe (verkürzt): $(10; -7; 8) \in e$?

(1) $-3\lambda = 6 \iff \lambda = -2$

(2) $3\lambda + \mu = -5$

[(3) $-2\lambda + 3\mu = 7$]

(1) → (2): $3\cdot(-2) + \mu = -5 \iff \mu = 1$ (4)

(1),(4) → (3): $-2\cdot(-2) + 3\cdot 1 = 7$ [wahr]

Der Stützpunkt von g ist ein Punkt der Ebene e.
Also verläuft g vollständig in der Ebene e.

(c) $\begin{pmatrix}-15\\17\\-4\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-3\\3\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

$(1)\quad -3\lambda = -15 \iff \lambda = 5$

$(2)\quad 3\lambda + \mu = 17$

$[(3)\quad -2\lambda + 3\mu = -4\ ]$

$(1) \to (2):\quad 3\cdot 5 + \mu = 17 \iff \mu = 2 \quad (4)$

$(1),(4) \to (3):\quad -2\cdot 5 + 3\cdot 2 = -4 \quad$ [wahr]

g liegt in der Ebene e oder verläuft parallel zu e.

Punktprobe (verkürzt): $(-5;6;2) \in e$?

$(1)\quad -3\lambda = -9 \iff \lambda = 3$

$(2)\quad 3\lambda + \mu = 8$

$[(3)\quad -2\lambda + 3\mu = 1\ ]$

$(1) \to (2):\quad 3\cdot 3 + \mu = 8 \iff \mu = -1 \quad (4)$

$(1),(4) \to (3):\quad -2\cdot 3 + 3(-1) \neq 1 \quad$ [falsch]

Die Gerade g verläuft parallel zur Ebene e.

(d) $\begin{pmatrix}-2\\0\\-7\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-3\\3\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

$(1)\quad -3\lambda = -2 \iff \lambda = \frac{2}{3}$

$(2)\quad 3\lambda + \mu = 0$

$[(3)\quad -2\lambda + 3\mu = -7\ ]$

$(1) \to (2):\quad 3\cdot\frac{2}{3} + \mu = 0 \iff \mu = -2 \quad (4)$

$(1),(4) \to (3):\quad -2\cdot\frac{2}{3} + 3(-2) = -7 \quad$ [falsch]

Schnittpunktansatz (verkürzt):

$(1)\quad -3\lambda + 2\rho = -3 \iff -21\lambda + 14\rho = -21$

$(2)\quad 3\lambda + \mu = -1 \iff -9\lambda - 3\mu = 3$

$(3)\quad -2\lambda + 3\mu + 7\rho = -13$

$(2)+(3):\quad -11\lambda + 7\rho = -10 \iff 22\lambda - 14\rho = 20 \quad (4)$

$(1)+(4):\quad \lambda = -1 \quad (5)$

$(5) \to (2):\quad 3\cdot(-1) + \mu = -1 \iff \mu = 2 \quad (6)$

$(5),\cancel{(6)} \to (1):\quad -3\cdot(-1) + 2\rho = -3 \iff 2\rho = -6 \iff \rho = -3$

Die Gerade g durchstößt die Ebene e im Punkt S mit

$\vec{s} = \begin{pmatrix}1\\-3\\-12\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}-2\\0\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-3\\9\end{pmatrix}$

Übung 11.3

$AB: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-7\\4\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}10\\5\\-15\end{pmatrix} \qquad e: \vec{x} = \begin{pmatrix}14\\-3\\8\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix}$

Wir prüfen die lineare Unabhängigkeit der Richtungsvektoren:

$(1) \quad -2\lambda + 5\mu = 10$

$(2) \quad -4\lambda = 5 \iff \lambda = -\frac{5}{4}$

$[(3) \quad \lambda - 2\mu = -15]$

$(2) \to (1): \quad -2\cdot\left(-\frac{5}{4}\right) + 5\mu = 10 \iff 5\mu = \frac{15}{2} \iff \mu = \frac{3}{2} \quad (4)$

$(2),(4) \to (3): \quad -\frac{5}{4} - 2\cdot\frac{3}{2} = -15 \quad$ [falsch!]

AB schneidet die Ebene e in genau einem Punkt S.

Schnittpunktansatz (verkürzt):

$(1) \quad -2\lambda + 5\mu - 10\rho = -11 \iff -4\lambda + 10\mu - 20\rho = -22$

$(2) \quad -4\lambda - 5\rho = -4$

$(3) \quad \lambda - 2\mu + 15\rho = -4 \iff 5\lambda - 10\mu + 75\rho = -20$

$(1)+(3): \quad \lambda + 55\rho = -42 \iff 4\lambda + 220\rho = -168 \quad (4)$

$(2)+(4) \quad 215\rho = -172 \iff \rho = -\frac{4}{5}$

$\vec{S} = \begin{pmatrix}3\\-7\\4\end{pmatrix} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix}10\\5\\-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-7\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-8\\-4\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-11\\16\end{pmatrix}$

S teilt die Strecke $\overline{AB}$ außen im Verhältnis $-4:9$

Übung 11.4

$ABC: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\-7\\5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-6\\6\\-3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-4\\8\\-4\end{pmatrix} \qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\-7\\8\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}-3\\-5\\4\end{pmatrix}$

$(1) \quad -6\lambda - 4\mu = -3$

$(2) \quad 6\lambda + 8\mu = -5$

$[(3) \quad -3\lambda - 4\mu = 4]$

$(1)+(2): \quad 4\mu = -8 \iff \mu = -2 \quad (4)$

$(4) \to (1): \quad -6\lambda + 8 = -3 \iff \lambda = \frac{11}{6} \quad (5)$

$(4),(5) \to (3): \quad -\frac{11}{2} + 8 = 4 \quad$ [falsch!]

g durchstößt die Ebene ABC in einem Punkt Q.

Schnittpunktansatz (verkürzt):

$$(1)\quad -6\lambda - 4\mu + 3\rho = -13$$

$$(2)\quad 6\lambda + 8\mu + 5\rho = 0$$

$$(3)\quad -3\lambda - 4\mu - 4\rho = 3 \iff -6\lambda - 8\mu - 8\rho = 6$$

$$(1)+(2):\quad 4\mu + 8\rho = -13 \qquad (4)$$

$$(2)+(3):\quad -3\rho = 6 \iff \rho = -2 \qquad (5)$$

$$(5)\to(4):\quad 4\mu - 16 = -13 \iff \mu = \frac{3}{4} \qquad (6)$$

$$(5),(6)\to(1):\quad -6\lambda - 4\cdot\frac{3}{4} + 3\cdot(-2) = -13 \iff -6\lambda = -4 \iff \lambda = \frac{2}{3}$$

(b) Aus Teilaufgabe (a) folgt: $\vec{AQ} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$,

weil $\vec{Q} = \vec{A} + \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$ gilt.

Nun gilt zwar $\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \in [0;1]$, aber $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} > 1$

Also liegt Q nicht im Innern des Dreiecks <ABC>.

Übung 11.5

Wir prüfen zunächst die Unabhängigkeit der Richtungsvektoren:

$$(1)\quad -3\lambda + 2\mu = -6$$

$$(2)\quad 2\lambda + \mu = 11 \iff -4\lambda - 2\mu = -22$$

$$[(3)\quad -\lambda - 4\mu = -16]$$

$$(1)+(2):\quad -7\lambda = -28 \iff \lambda = 4 \qquad (4)$$

$$(4)\to(2):\quad 8 + \mu = 11 \iff \mu = 3 \qquad (5)$$

$$(4),(5)\to(3):\quad -4 - 4\cdot 3 = -16 \quad [\text{wahr!}]$$

Alle Geraden g_t sind entweder parallel zu e oder verlaufen in e.

Punktprobe (verkürzt):

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(1)\quad -3\lambda + 2\mu = 7$$
$$(2)\quad 2\lambda + \mu = 0 \iff -4\lambda - 2\mu = 0$$
$$(3)\quad -\lambda - 4\mu = t-3$$

$(1)+(2):\ -7\lambda = 7 \iff \lambda = -1 \quad (4)$

$(4)\to(2):\ -2 + \mu = 0 \iff \mu = 2 \quad (5)$

$(4),(5)\to(3):\ -(-1) - 4\cdot 2 = t-3 \iff 1-8 = t-3 \iff t = -4$

Ist $t=-4$ liegt die Gerade g_t in der Ebene e; andernfalls verläuft g_t parallel zu e.

Übung 11.6

Wir prüfen, ob der Richtungsvektor von g linear unabhängig von den Richtungsvektoren der Ebene e_t $(t\in\mathbb{R})$ ist:

$$(1)\quad t\lambda + \mu = 2$$
$$(2)\quad 4\lambda = -4 \iff \lambda = -1$$
$$(3)\quad 2\lambda - 3\mu = 1$$

$(2)\to(3):\ 2\cdot(-1) - 3\mu = 1 \iff -3\mu = 3 \iff \mu = -1 \quad (4)$

$(2),(4)\to(1):\ t\cdot(-1) - 1 = 2 \iff -t = 3 \iff t = -3$

Die Gerade g verläuft parallel zu oder innerhalb der Ebene e_{-3}.

Punktprobe (verkürzt):

$$(1)\quad -3\lambda + \mu = -3$$
$$(2)\quad 4\lambda = -2 \iff \lambda = -\tfrac{1}{2}$$
$$[\ (3)\quad 2\lambda - 3\mu = 7\ ]$$

$(2)\to(1):\ -3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \mu = -3 \iff \mu = -\frac{9}{2} \quad (4)$

$(2),(4)\to(3):\ 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{9}{2}\cdot(-3) = 7 \iff -1 + \frac{27}{2} = 7$ [falsch!]

g verläuft parallel zu e_{-3}.

Für $t \neq -3$ muss g die Ebene e_t in jeweils genau einem Punkt S_t durchstoßen.

Schnittpunktansatz für $t \neq -3$:

$$\begin{array}{llcl}
(1) & t\lambda + \mu - 2\rho = -3 & \Leftrightarrow & 3t\lambda + 3\mu - 6\rho = -9 \\
(2) & 4\lambda + 4\rho = -2 & \Leftrightarrow & 4(3t+2)\lambda + 4(3t+2)\rho = -2(3t+2) \\
(3) & 2\lambda - 3\mu - \rho = 7 & &
\end{array}$$

$$(1)+(3) \quad (3t+2)\lambda - 7\rho = -2 \Leftrightarrow -4(3t+2)\lambda + 28\rho = +8 \quad (4)$$

$$(2)+(4) \quad (12t+36)\rho = -6t+4 \Leftrightarrow \rho = \frac{4-6t}{12t+36}$$

$$\vec{S_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{4-6t}{12t+36}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Übung 11.7

(a) Wir untersuchen die drei Richtungsvektoren auf lineare Abhängigkeit:

$$\begin{array}{llcl}
(1) & -3\lambda + 2\mu = -16 + 4t & & \\
(2) & +2\lambda + \mu = 6 + 2t & \Leftrightarrow & -4\lambda - 2\mu = -12 - 4t \\
(3) & -\lambda - 4\mu = -10 - 8t & &
\end{array}$$

$$(1)+(2): \quad -7\lambda = -28 \Leftrightarrow \lambda = 4 \quad (4)$$

$$(4)\to(1): \quad -12 + 2\mu = -16 + 4t \Leftrightarrow 2\mu = 4t - 4 \Leftrightarrow \mu = 2t - 2 \quad (5)$$

$$(4),(5)\to(3): \quad -4 - 4(2t-2) = -10 - 8t \Leftrightarrow 4 = -10 \quad [\text{falsch}]$$

Jede Gerade g_t durchstößt die Ebene e in jeweils genau einem Punkt S_t.

(b) Schnittpunktansatz (verkürzt):

$$\begin{array}{llcl}
(1) & -3\lambda + 2\mu + (16-4t)\rho = 5 & \Leftrightarrow & -6\lambda + 4\mu + (32-8t)\rho = 10 \\
(2) & 2\lambda + \mu + (-6-2t)\rho = -2 & \Leftrightarrow & -4\lambda - 2\mu + (12+4t)\rho = 4 \\
(3) & -\lambda - 4\mu + (10+8t)\rho = 13 & \Leftrightarrow &
\end{array}$$

$$(1)+(2): \quad -7\lambda + (28+0t)\rho = 9 \quad (4)$$

$$(1)+(3): \quad -7\lambda + (42+0t)\rho = 23 \quad (5)$$

$$(5)-(4): \quad 14\rho = 14 \Leftrightarrow \rho = 1$$

$$\vec{S_t} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16+4t \\ 6+2t \\ -10-8t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t-12 \\ 2t+8 \\ -8t-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

Die Schnittpunkte bilden eine Gerade mit dem Stützpunkt $(-12; 8; -4)$ und dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$.